Lettura analitica e lettura sintetica in matematica

Un'opinione in forma di novella

Daniele Guido

Mi svegliai. E la prima cosa che vidi alzandomi fu un foglietto con una formula scritta in grande:

$$e^{iš} + 1 = 0$$

Sulle prime non credetti ai miei occhi. "Uno scherzo di Bea!" pensai. Ma sapevo già che, pur trattandosi di Bea, non era uno scherzo, ma una sfida. Bea è ovviamente Beatrice, mia sorella maggiore, vittima come me della passione stilnovista dei miei, e che odia il suo nome almeno quanto io odio il mio. Io la chiamo Bea. E lei, per riconoscenza, mi chiama Dan. E tuttavia quella formula era davvero dura da mandare giù. "eallaipigrecopiuunougualezero". Potevo leggerlo, e questo è già qualcosa, ma sembrava un brutto gioco di parole, come quei poeti antichi che cercavano di mettere nello stesso verso i nomi dei quattro elementi. Pigreco è stato il primo che ho imparato, quando mi hanno detto che il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e quella del diametro di qualunque cerchio è sempre lo stesso, ma c'è voluto un po' perché capissi la sua peculiarità. "Perché pigreco e non semplicemente treequattordici?" chiesi una volta convinto che si trattasse di un vezzo classicheggiante, ma Bea mi spiegò che non era così.

Il fatto è che sebbene ogni cerchio concreto non permetta che misure approssimative di quel rapporto, poco più di tre, trevirgolauno, ecc. il rapporto tra circonferenza e diametro come puri oggetti matematici può essere calcolato con precisione arbitraria, e non soltanto contiene un numero infinito di cifre decimali, ma queste cifre sembrano tirate fuori a caso, senza nessun modello o legge di ricorrenza. Pigreco esprime in sintesi tutta quella infinità, né una cifra di più né una di meno. Il giorno seguente quella rivelazione dissi a Bea che “treequattordici è solo una pallida ombra della perfezione di pigreco”. “Un po’ neoplatonico ma carino” disse lei.

Se non altro ***e*** sta al posto giusto. È la base preferita per i logaritmi, dunque è una base ragionevole per le potenze. “Ma che numero è?”, avevo chiesto una volta. “È un numero irrazionale, come pigreco, ma un po’ più piccolo di tre, poco più di duevirgolasettantunoottantadueottantunoottantadueotto”, mi aveva risposto Bea. Avevo sgranato gli occhi. “Ma perché non scegliere i logaritmi in base due o meglio dieci, così il logaritmo di mille o diecimila è soltanto il numero degli zeri!” “Si vede che non conosci il calcolo differenziale”, aveva detto acidamente. Comunque eallapigreco avrei potuto capirlo, sarà un numero tra venti e trenta, ma eallaipigreco? Beh, comunque, poiché $e^{iš} + 1 = 0$, eallaipigreco deve fare meno uno, perciò ipigreco dovrebbe essere il logaritmo di meno uno. Peccato che i logaritmi dei numeri negativi non abbiano senso! “Tutto sommato - pensai sconsolato - un logaritmo impossibile ha come soluzione un numero immaginario!”

Sì, perché i matematici, non contenti di aver trovato una formula che risolve le equazioni di secondo grado dando due soluzioni quando ce ne sono due, una quando ce n’è una e perdendo di senso quando non ce n’è nessuna, avevano dedotto che la forma è più vera della realtà, perciò una equazione di secondo grado ha sempre due soluzioni, a volte reali e distinte, a volte reali e coincidenti, a volte immaginarie! E visto che nelle soluzioni immaginarie compare la radice di un numero negativo, e che tutto si può perdere fuorché la forma, la radice di meno cinque è la radice di meno uno per la radice di cinque, ed essendo la seconda perfettamente definita, tutta l'anomalia si concentra nella prima, “la madre di tutti gli immaginari” potremmo dire, *i*, per brevità. La matematica è rigorosa immaginazione, dissi quella volta a Bea. Gli piacque, ma per non darlo a vedere (non sia mai che una sorella maggiore sia orgogliosa del fratello!) mi ammannì una predica sul fatto che l'unità immaginaria era stata introdotta per le equazioni di terzo grado e non di secondo...

Il lampo mi bloccò mentre stavo infilandomi il secondo calzino. Sì, perché tutta la riflessione precedente non era durata che il breve volgere di tempo necessario ad infilarmi il calzino sinistro. Sento già i risolini dei maligni che diranno che sono sempre stato lento nel vestirmi. Maligni, per l'appunto. Dicevo che mi bloccai come per un lampo di consapevolezza. L'impossibile (immaginario!) logaritmo di meno uno era uguale all'impossibile (immaginaria!) radice di meno uno moltiplicata per pigreco. Il rapporto tra quelle apparenti impossibilità coincideva con il rapporto tra circonferenza e diametro. Che esistano circonferenze immaginarie? Da lì in poi però non riuscii più a muovere un passo.

La stasi durò tutto il giorno e mia sorella a cena dovette accorgersene, perché più tardi trovai, come lasciato in giro per caso, un libro piuttosto consunto dal titolo “Serie di potenze”. Che c'entrano, direte voi, le serie con i logaritmi, i numeri immaginari e le circonferenze? In primo luogo in matematica tutto si tiene, e poi quel libro era di Bea e non l'aveva certo lasciato in giro per caso, quindi una relazione doveva esserci senz'altro.

Di serie avevo già sentito parlare. In genere, se sommiamo infinite quantità otteniamo una quantità infinita, se disegniamo infiniti segmenti della stessa lunghezza uno dopo l'altro otteniamo un segmento di lunghezza infinita, ma a volte, se le grandezze che sommiamo sono sempre più piccole, si può ottenere una somma finita: se ad un segmento ne aggiungiamo uno lungo la metà, e poi uno lungo la metà della metà, e poi uno lungo la metà della metà della metà, e andiamo avanti all'infinito, il segmento che si ottiene è lungo esattamente il doppio di quello da cui siamo partiti:

$$1 + {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{4} + {}^{1}/_{8} + {}^{1}/_{16} + \ldots = 2$$

Queste somme di infinite quantità, che diano luogo a grandezze finite oppure no, si chiamano serie. E le serie di potenze?

Aprii il libro.

Il primo esempio che veniva riportato era simile all'esempio che citavo prima,

$$1 + x + x^{2} + x^{3} + x^{4} + x^{5} + \ldots$$

la somma infinita di potenze con la stessa base e con esponente via via crescente. Solo che mentre la base nell'esempio precedente era un numero fissato, 1/2 per l'esattezza, qui la base era volutamente lasciata nel vago. Ci si domandava "per quali x la serie converge, cioè dà somma finita?" Quella di cui sopra, leggevo, converge solo quando $-1 < x < 1$, e la sua somma è ${}^{1}/_{(1-x)}$. Beh, se $x = {}^{1}/_{2}$ effettivamente la somma fa due, mi consolai, ma come facevano a conoscere la somma per tutti gli x, e sapere che la somma era finita solo se $-1 < x < 1$? Poi, per complicare le cose, si consideravano serie modificate rispetto a quella di prima, ad esempio serie come

$$x + {}^{x2}/_{2} + {}^{x3}/_{3} + {}^{x4}/_{4} + \ldots$$

Questa, leggevo, converge solo se $-1 \le x < 1$ (perché mai anche $x = -1$?) e la somma è $-\log(1-x)$. Da non credere! Si trattava certo di logaritmi in base ***e***. Non sapevo ancora nulla sul calcolo differenziale, pensai, ma se ***e*** era capace di generare una serie così bella valeva la pena di adottarlo come base preferita. Il guaio è che ero ancora all'introduzione del libro. Cominciai a sfogliarlo e mi imbattei subito in un teorema:

L'insieme dei numeri x per cui la serie di potenze è convergente è sempre un "intervallo di centro l'origine". Il suo raggio r può essere calcolato tramite la formula

$$r^{-1} = \limsup (a_n)^{1/n}$$

Cominciai a sentirmi scoraggiato. Riuscivo a malapena a leggere l'enunciato, capendoci ben poco, avrei dovuto leggere e capire anche la dimostrazione? "Una vera sfida - dice Bea - non è chiedere l'impossibile, ma chiedere il massimo di ciò che è umanamente possibile". E questa era la vera sfida: se lei riteneva che era al limite massimo delle mie possibilità, dovevo farcela, e possibilmente con nonchalance e fischiettando.

Cominciai a sfogliare il libro compulsivamente. Era come aprire un forziere colmo di antiche monete d'oro buttandole tutte all'aria per trovare la sola che era l'oggetto della mia ricerca. Ma l'avrei riconosciuta? Raggio di convergenza, convergenza al bordo, derivate ed integrali di una serie di potenze, serie di Taylor, teoremi sempre più formidabili mi si paravano d'innanzi, di cui afferravo solo qualche bagliore riflesso, finché non giunsi al capitolo "serie di potenze in campo complesso". Fuochino! I numeri immaginari sono un caso particolare dei numeri complessi; forse avrei trovato qualcosa; "La funzione esponenziale in campo complesso". Bingo!

… pertanto la serie di Taylor per la funzione esponenziale nel campo reale ci permetterà di definire la funzione esponenziale nel campo complesso:

$$\boldsymbol{e}^{z} = 1 + z + {}^{z2}/_{2!} + {}^{z3}/_{3!} + {}^{z4}/_{4!} + \dots$$

Poiché questa serie ha raggio di convergenza infinito definirà una funzione su tutto il piano complesso.

Se scegliamo $z = i\rho$ mi dissi, si avrà

$$\boldsymbol{e}^{i\check{s}} = 1 + (i\check{s}) + {}^{(i\check{s})2}/_{2!} + {}^{(i\check{s})3}/_{3!} + {}^{(i\check{s})4}/_{4!} + \dots$$

Mi concessi un lungo respiro, chiusi il libro e cominciai a pensare. Quale trucco infernale poteva mai spiegare che quella incredibile serie non solo convergeva, ma aveva come somma –1? L'unica cosa che mi incuriosiva era che nella serie comparissero potenze di *i*. Ora *i* è per definizione la radice di meno uno, dunque il suo quadrato è meno uno. Allora

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i\ ,$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1,$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i\dots$$

Insomma le potenze di *i* si ripetono, ogni quattro passi ci ridanno il numero *i* , dunque di quella serie un quarto dei termini erano numeri positivi, un quarto numeri negativi, un quarto numeri positivi per *i*, ed il restante quarto numeri negativi per *i*. Se la somma doveva essere meno uno voleva dire che la somma dei numeri positivi per *i* si equilibrava perfettamente con la somma dei numeri negativi per *i*, mentre la somma dei positivi e dei negativi dava complessivamente -1. E allora? Lo confesso, a questo punto presi la calcolatrice. Cominciai a sommare faticosamente i vari contributi, e dopo un'ora buona di conti mi accorsi che, dopo aver sommato un bel po' di termini, il miracolo si avverava, almeno fino alla terza cifra decimale. Ma si trattava di un miracolo appunto, non certo di una spiegazione. Ero un po' stanco e solo parzialmente soddisfatto, riaprii il libro, ma senza grandi speranze. E invece "Formule di Eulero" trovai. Suonava bene, ***e*** per Eulero, pensai.

…si consideri allora il numero complesso $\boldsymbol{e}^{it}$ *con t reale.*

È lui! Poi, con un procedimento che mi inorgoglì perché si basava sulla "mia" idea che le potenze di *i* si ripetono ogni quattro passi, scriveva:

…dunque

$$\boldsymbol{e}^{it} = \left(1 - {t^2}/{2!} + {t^4}/{4!} - {t^6}/{6!} + \dots\right) + i\left(t - {t^3}/{3!} + {t^5}/{5!} - {t^7}/{7!} + \dots\right)$$

ovvero, riconoscendo gli sviluppi di Taylor di seno e coseno,

$$\boldsymbol{e}^{\,it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

“Molto conveniente”, dissi a me stesso, raccogliere tutti i termini reali in una sola funzione e chiamarla coseno e tutti quelli immaginari in un’altra e chiamarla seno, ma che cos’erano queste funzioni? Magari, visto che l’esponenziale complesso era stato definito tramite una serie di potenze, anche seno e coseno erano definiti in questo modo!

Infine, riflettei $\boldsymbol{e}^{\,i\check{s}} = \cos \check{s} + i \operatorname{sen} \check{s}$, quindi tutto ciò che manca per capire la formula misteriosa è verificare che cos š = -1 e sin š = 0. Non molto diverso da prima, visto che di coseno e seno conoscevo solo la loro espansione in serie di potenze! Però... il barlume di un’idea... fantastico! $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$!!! E sì, perché da un lato $\boldsymbol{e}^{\,it}\boldsymbol{e}^{\,-it} = e^0 = 1$, dall’altro

$$\boldsymbol{e}^{\,it}\boldsymbol{e}^{\,-it} = (\cos t + i \operatorname{sen} t)(\cos -t + i \operatorname{sen} -t),$$

ma nella serie di potenze del coseno compaiono solo potenze pari, che del segno se ne fregano, cioè $\cos -t = \cos t$, mentre nella serie di potenze del seno compaiono solo potenze dispari, quindi $\operatorname{sen} -t = \operatorname{sen} t$, e infine

$$1 = \boldsymbol{e}^{\,it}\boldsymbol{e}^{\,-it} = (\cos t + i \operatorname{sen} t)(\cos t - i \operatorname{sen} t) = \cos^2 t - i^2 \operatorname{sen}^2 t$$
$$= \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t$$

Però, fino ad un attimo prima non avevo mai sentito parlare di coseno e seno, ed ora avevo dimostrato addirittura un teorema! Niente male!

E quindi, se $\cos \check{s} = -1$, necessariamente sen *š* deve essere zero. Metà dell’opera, ma perché il coseno di *š* dovrebbe essere -1? D’un tratto mi sentii stanchissimo. Mi guardai intorno e mi accorsi che era notte fonda, preso dal mio problema non mi ero accorto del tempo che passava. Chiusi il libro e andai al letto.

Sognai. Le serie di potenze si muovevano, anzi correvano su un campo piatto e sconfinato, erano simili ad un segno di sommatoria • , ma anche a metà tra un centauro ed un cavaliere medioevale, e dovevano giocare una specie di torneo. A un certo punto tutti dovevano colpire con delle bocce esattamente un punto del campo chiamato pigreco, ma quando toccò al cavaliere nero che si chiamava coseno, invece di lanciare ci saltò sopra, ed in un attimo si trasformò nel segno -1. Lo sapevo! dissi a me stesso nel sogno. E mi svegliai.

Mentre ripercorrevo confuso le immagini del sogno, mi accorsi che in realtà il cavaliere coseno aveva la forma di un rettangolo nero con la scritta bianca cos. E allora ricordai. Un tasto della calcolatrice! Ecco dove avevo già visto quella scritta! Mi alzai, presi la calcolatrice, digitai con emozione cos *š* ENTER e apparve, luminoso sul piccolo display a cristalli liquidi, il numero -1. Tornai al letto e, soddisfatto, dormii come un sasso fino al giorno dopo.

La mattina a colazione dissi, quasi tra me e me ma in modo che Bea sentisse: “Forte, Eulero”. “Già”, disse lei, e mi guardò fisso. Io mi confusi e dissi farfugliando “ma perché il coseno di pigreco è meno uno?” Lei sembrò non capire, disse “e che cos’è il coseno di *t*?” “Beh, è una serie di potenze pari, $1 - {t^2}/{2!} + {t^4}/{4!} - {t^6}/{6!}$ eccetera, insomma al numeratore sempre una potenza pari e al denominatore il fattoriale dell’esponente, ed il segno una volta più ed una volta meno...” “Ah, - disse Bea - ma vedi, il coseno di *t* è anche l’ascissa di un punto sulla circonferenza di centro l’origine e raggio 1 ottenuto muovendosi sulla circonferenza in senso antiorario di una lunghezza *t* a partire dal punto (1,0), credevo lo sapessi. E quindi se ci si muove di pigreco si fa mezzo giro, e si arriva al punto (-1,0)”. Rimasi senza fiato. Ma allora non avevo capito niente! “Cerchi, lunghezze, ascisse. E io che avevo capito esponenziali, serie di potenze, numeri complessi...” Rividi nella mia mente quella formula: l’esponenziale era come un simbolo sintetico per una infinita serie di potenze, che ne generava per scissione due, coseno e seno, ascissa ed ordinata di un punto su un cerchio, che fa mezzo giro e poi si ferma. Mezzo giro a sinistra, ($\boldsymbol{e}^{i\check{s}}$) più un passo a destra (+1) e si cade nell'origine. Zero!

"... comunque la parte che hai capito tu era la più difficile", stava dicendo Bea; "ci hai messo appena un giorno, e in fondo hai solo quattordici anni!" e sorrise. Io la guardai negli occhi, e capii che lei era la mia teologia, e che mi avrebbe accompagnato, presenza a volte invisibile ma sempre eloquente, fino in paradiso.