Esperienza geometrica di un problema algebrico

Daniele Guido

Ho sempre pensato che il gesto archetipico dell'esperienza matematica sia il tuffo. È un gesto che rappresenta la disponibilità, tra il fiducioso ed il temerario, ad immergersi in un mezzo alieno, confidando di essere in grado di nuotare e di guardarsi attorno. Potrete perciò immaginare la mia sorpresa e la mia commozione nel trovare, nei dipinti rinvenuti nelle pareti interne di una tomba greca a Paestum, proprio l'immagine del tuffatore. A quanto pare la presenza dei dipinti in una tomba greca, fatto unico nel suo genere, testimonia di uno scambio culturale intenso con le vicine popolazioni di origine Etrusca. Ed anche i simboli presenti testimoniano di questa forma di sincretismo culturale. Il tema sembra essere quello della conoscenza, ed in certo modo della conoscenza esoterica. Le immagini del convivio, come il vino e l'amore con giovinetti, simboli presso i greci della conoscenza misterica, sono accostati alla morte come passaggio nell'aldilà, considerato presso gli etruschi come il passaggio verso la conoscenza delle cose segrete. E questo passaggio è rappresentato da un tuffatore che, da un muro che richiama le colonne d'Ercole, si getta nel grande mare Oceano.

Cercherò in questo articolo di raccontare un episodio dell'esperienza matematica, che corrisponde ad una dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra[1].

Piazze, palazzi e uffici rimasti orfani d'autore, "Il Sole-24 ore", 22 marzo 1998, p.32.

1 Questa idea di dimostrazione è essenzialmente tratta dal libro di Massey: Singular Homology Theory, Springer Verlag. L'uso delle triangolazioni invece

Vedrete come questo mare, questo spazio esterno, nel quale si comincia faticosamente a nuotare, venga presto riconosciuto come spazio interno, cioè "compreso", come in questo ambiente si possano quindi effettuare esperimenti che portino, infine, alla soluzione del problema.

La posizione del problema. Cominciamo con un problema semplice: "Trovare un numero il cui quadruplo è uguale a dodici". Mentre il lettore ha facilmente trovato il risultato, il matematico si crogiola con una questione preliminare: possiamo essere certi che esista una soluzione, oppure provare che essa sia unica? In questo caso il problema di principio riceve una risposta immediata dal metodo risolutivo: quel numero deve necessariamente essere uguale a dodici diviso quattro, e quindi a tre. La soluzione può essere determinata, quindi esiste, e determinata univocamente, quindi è l'unica.

Questo vale ovviamente per tutta una classe di problemi, che prendono il nome di equazioni di primo grado, tutte di questo tipo: un multiplo dato della quantità incognita è uguale ad un altro numero dato. In formule $\mathbf{ax}=\mathbf{b}$, ove **a** e **b** indicano numeri noti e **x** il numero da determinare, l'incognita. Le regole dell'algebra implicano allora che **x** è uguale a **b** diviso **a**, $\mathbf{x}=\mathbf{b/a}$, quindi esiste ed è unico.

La cosa si complica se però consideriamo un problema appena un po' diverso: "Trovare un numero per cui il quadruplo del suo quadrato più il suo doppio sia uguale a due", o anche $4\mathbf{x}^2+2\mathbf{x}-2=0$. A prima vista non solo non sappiamo determinare il numero incognito, ma non sappiamo nemmeno dire se un tal numero esiste, ed in tal caso quante sono le soluzioni.

Osserviamo però che l'equazione di cui sopra si può riscrivere, usando semplicemente le proprietà dell'algebra, come $(4\mathbf{x}-2)(\mathbf{x}+1)=0$, nel senso che se facciamo il prodotto $(4\mathbf{x}-2)(\mathbf{x}+1)$ usando la proprietà distributiva otteniamo $4\mathbf{x}^2+2\mathbf{x}-2$. D'altronde un prodotto di due numeri è uguale a zero solo quando almeno uno dei due numeri è uguale a zero, quindi un numero **x** verificherà l'equazione $4\mathbf{x}^2+2\mathbf{x}-2=0$ solo quando verifica l'equazione $4\mathbf{x}-2=0$ oppure l'equazione $\mathbf{x}+1=0$. Ci siamo quindi riportati a risolvere due equazioni lineari, perciò il problema iniziale ha esattamente due soluzioni, 0,5 e -1. È chiaro che se riuscissimo ad applicare questo metodo in generale, ovvero scrivere una espressione algebrica di secondo grado (ovvero in cui l'incognita compare al più al quadrato) come il prodotto di due espressio-

ni di primo grado, avremmo dimostrato che ogni equazione di secondo grado ha due soluzioni.

Questa idea, che lega la ricerca delle soluzioni di un dato grado alla scrittura della corrispondente espressione come un prodotto di espressioni di grado più basso ha una validità del tutto generale. Un classico teorema attribuito a Ruffini afferma quanto segue:

> Una espressione algebrica di un dato grado si annulla per il valore **a** (ovvero **a** è una soluzione dell'equazione ottenuta eguagliando quella espressione a zero) allorquando la suddetta espressione si può scrivere come il prodotto di una espressione con grado diminuito di uno per l'espressione (**x- a**).

Questo teorema ci dice che se troviamo una soluzione di un'equazione algebrica possiamo abbassare di grado l'equazione, ottenendo una equazione il cui grado è diminuito di uno. Se potessimo ripetere l'operazione un'altra volta, cioè trovare ancora una soluzione, potremmo abbassare di grado ulteriormente, e quindi alla fine "contare" le soluzioni, cioè osservare che sono tante quante il grado dell'equazione iniziale.

Ovviamente le soluzioni che troviamo potrebbero non essere tutte diverse, ci potrebbero cioè essere delle ripetizioni, e quindi l'affermazione precedente vuol dire che l'espressione algebrica originale si può scrivere come il prodotto di tante espressioni di primo grado quanto è il grado dell'espressione originale.

Riassumendo: se riuscissimo a dimostrare che ogni espressione algebrica ammette almeno una soluzione, avremmo dimostrato che ne ammette tante quante il suo grado (con eventuali ripetizioni).

Assumendo infatti che ci sia sempre almeno una soluzione, e partendo ad esempio da una equazione di settimo grado, per mezzo della soluzione e del teorema di Ruffini potremo scrivere l'espressione di 7° grado come il prodotto di una di 6° e di una di 1°. Ma di nuovo l'equazione di 6° grado avrebbe una soluzione, e quindi potremo ulteriormente decomporre l'espressione di 6° grado in una di 5° ed una di 1°, e quindi l'espressione originale nel prodotto di una di 5° e due di 1° grado. Andando avanti in questo modo arriveremmo infine a decomporre l'espressione originale in un prodotto di sette espressioni di primo grado, e quindi otterremmo le menzionate sette soluzioni.

"Ma - esploderà l'avvertito lettore, spazientito per essere stato costretto a questa lunga nuotata algebrica - quella proposizione

cui ci hai faticosamente trascinato è un'ipotetica dell'impossibile! Tutti sanno che ci sono equazioni di secondo grado prive di soluzione!"

Non posso ovviamente che dar ragione all'ipotetico antagonista, l'equazione $\mathbf{x}^2+1=0$ ad esempio, ovvero il problema di trovare numeri il cui quadrato è -1, è un classico problema senza soluzione. O, perlomeno, senza soluzione reale...

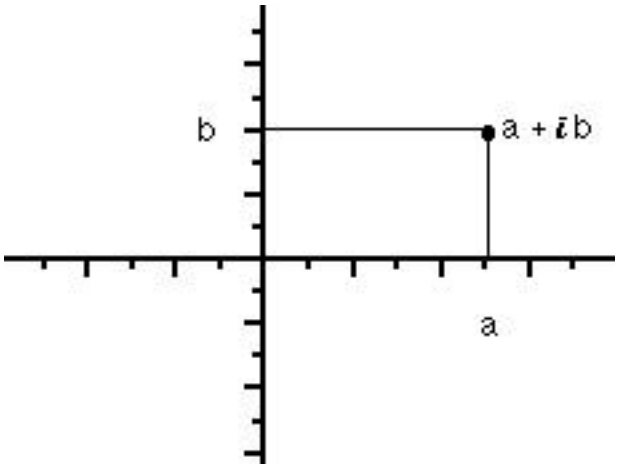
Nel dir così il matematico ride sotto i baffi, perché sa già che non si limiterà a sconfiggere l'antagonista, ma lo trasformerà un deuteragonista. La contraddizione prospettata permetterà al matematico di immaginare una soluzione al problema insolubile, che chiamerà con una certa beffarda ironia soluzione immaginaria, salvo poi sviluppare una teoria che gli permetta di "realizzare" anche i numeri immaginari, situandoli in una nuova famiglia di numeri, i numeri complessi, che sembrano inventati un po' *ad hoc* ma funzionano bene. Anzi, la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado si adatta perfettamente a questo nuovo insieme di numeri, affermando che ogni equazione di secondo grado ha due soluzioni nel campo dei numeri complessi.

Possiamo insomma enunciare una congettura credibile: *Ogni equazione algebrica ammette almeno una soluzione nel campo dei numeri complessi.*

Se questa congettura è vera l'ipotetica dell'impossibile si trasformerà in un teorema, tanto importante da meritare il teorema fondamentale dell'algebra: ogni equazione algebrica ammette tante soluzioni quanto il suo grado, a meno di ripetizioni, nel campo dei numeri complessi.

L'irruzione della geometria. È arrivato il momento di rivolgere un secondo sguardo ai numeri complessi, introdotti un po' affrettatamente per risolvere le equazioni di secondo grado. Numeri cosiddetti complessi, perché formati da una parte reale e da una immaginaria, duplici insomma dal loro primo apparire, e che pertanto richiedono, per essere rappresentati geometricamente, altrettanta duplicità. Se possiamo descrivere i numeri usuali come punti di una retta, così come sull'asticella graduata di un termometro ad ogni punto corrisponde un numero, positivo o negativo a seconda che si trovi al di sopra o al di sotto dello zero, dovremo descrivere i numeri complessi tramite uno spazio bidimensionale, cioè un piano, in cui siano fissate due asticelle graduate perpendicolari. Ad ogni punto del piano assoceremo il numero che si legge guardando verso l'asse orizzontale, e che

interpreteremo come parte reale del numero complesso, ed il numero che si legge guardando verso l'asse verticale, che interpreteremo come parte immaginaria del numero complesso.



Dunque d'ora in poi penseremo ad i numeri complessi come punti del piano. E la soluzione di una equazione algebrica? Sono numeri complessi (cioè punti del piano!) che sostituiti in una data espressione producono il valore zero, cioè il punto all'incrocio delle asticelle graduate.

Ma cos'è dunque un'espressione? qualcosa che, a partire da un numero, o punto, ne produce, tramite delle operazioni, un altro. Prende cioè un punto e lo sposta da un'altra parte, è un movimento come una corrente o un vento improvviso, che trascina ogni punto da un luogo di partenza ad uno di arrivo. Si tratta però, e questo è molto importante, di un movimento continuo, senza strappi.

Se immaginiamo di concentrare la nostra attenzione su un piccolo lembo di piano, ci accorgeremo che la folata di vento non sparpaglia i punti come granelli di sabbia, bensì ne mantiene l'integrità. Ritroveremo quel lembo magari da un'altra parte, e forse così deformato da essere irriconoscibile, ma senza che si sia prodotto alcuno strappo o cucitura[2].

---

che delle catene di 2-simplessi mi è stato suggerito da Laszlo Zsido, ordinario di Analisi presso l'Università di Roma "Tor Vergata", che per questo ringrazio.

2 Sulla pag. seguente il celebre "gatto di Arnold", con cui uno dei più celebri

Una soluzione dell'equazione è perciò un punto che sotto il prescritto movimento continuo va a finire in zero, nel punto all'incrocio delle asticelle. La congettura insomma chiede che questa specie di lenzuolo, pronto a sollevarsi al primo colpo di vento, non si trasformi in una coperta stretta, lasciando scoperto qualche punto.

E a ben guardare infatti lo zero non gioca nessun ruolo particolare, se esiste un movimento continuo del piano che lascia scoperto un certo punto potremo, combinando questo movimento con uno slittamento, trovarne un altro che lascia scoperto lo zero. La congettura può così essere riformulata: *un movimento continuo del piano descritto tramite una espressione algebrica non lascia scoperto alcun punto, ovvero ogni punto è un punto di arrivo.*

I matematici, convinti come in molti miti delle origini che l'universo si crei nominandolo[3], si sono affrettati a dare un nome a questa proprietà: un movimento per cui ogni punto è punto di arrivo si chiama *suriettivo*.

Il piano complesso, liberato dalla sua ormai inutile impalcatura di asticelle, è ora pronto per la sua definitiva trasformazione.

Dall'immersione alla comprensione. Il nostro viaggio è cominciato con un tuffo, un'immersione nell'ambiente alieno ed astratto delle equazioni algebriche, ma si è poi trasformato in una fluida ricognizione sopra un piano ed i suoi movimenti. Ma il piano, pur nella sua apparente piena visibilità, conserva un aspetto incomprensibile, il suo infinito estendersi nelle due direzioni. E come può la nostra mente comprendere l'infinito?

Il matematico, che disprezza la metafisica, prenderà la domanda retorica in senso letterale, e sorridendo controdomanderà:

---

fisici - matematici contemporanei descrive appunto i movimenti continui. (Arnold, "Metodi matematici per la meccanica classica", Editori Riuniti).

"Che cos'è l'infinito del piano?" - L'infinito del piano è il suo limite. E potremo tendere a questo limite partendo da un qualunque punto e allontanandoci in qualunque direzione. Questo limite, questo luogo dell'infinitamente lontano, si manifesta dunque come il degno e naturale coronamento del piano[4]. Che forma ha dunque questo piano così coronato? Da ambiente illimitato ed aperto diviene un luogo perfettamente conchiuso, in cui la fuga porta sempre al medesimo punto, un po' come sulla terra, ove viaggiando verso nord si giunge inevitabilmente al polo, indipendentemente dal punto di partenza. Con la semplice aggiunta di un punto, il piano è divenuto una sfera.

Non credete a chi vi dice che l'evoluzione matematica segue regole astratte ed universali. L'inventiva umana, sia pure in campo matematico, non può essere che figlia del nostro ambiente, sia nel senso culturale che in quello più prosaico della terra che calpestiamo e del cielo cui leviamo lo sguardo.[5] La sfera, pur condividendo col piano la perfezione consistente nella mancanza di punti cospicui (se non nell'occhio di chi guarda!), ha il vantaggio di poter essere racchiusa, compresa, anche nelle anguste stanze della nostra mente.

Che ne sarà ora dei nostri movimenti continui? È facile convincersi che un percorso sul piano che tenda all'infinitamente lontano verrà trasformato da un'espressione algebrica in un altro percorso tendente anch'esso all'infinito, e dunque l'infinito rappresenta un punto morto del nostro movimento. Ovvero il movimento del piano complesso proveniente da un'espressione algebrica da luogo ad un movimento continuo della sfera, che ha nel punto all'infinito un punto fermo. Avremo dunque un'ulteriore traduzione della nostra congettura: *Il movimento continuo della sfera proveniente da una qualunque espressione algebrica è suriettivo.*

Pavimenti e triangolazioni. Per poter compiere l'ultimo passo, cioè dimostrare la congettura nella sua ultima versione, dobbiamo rompere quella perfetta simmetria che abbiamo faticosamente

---

3 Un esempio tra i più affascinanti è quello degli aborigeni australiani descritto da Bruce Chatwin in "Le vie dei canti", Adelphi, 1988.

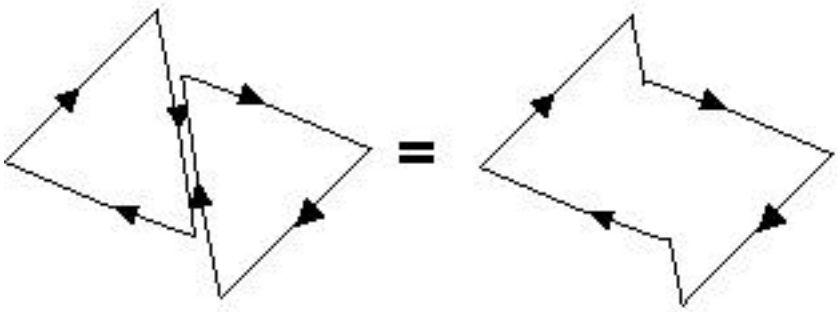
4 Vedi Daniele Guido, "Limiti, limiti generalizzati ed ultrafiltri", in Aperture, vol. 2, Confini e limiti, Roma 1997.

5 Si legga a proposito il divertissement del celebre fisico-matematico David Ruelle "Conversations on mathematics with a visitor from outer space" apparso di recente sull'archivio elettronico dell'Università di Austin, Texas

conquistato. La perfezione è in qualche modo inafferrabile, o anche, è difficile muoversi su una superficie così liscia senza scivolare. Vedremo che se copriamo la sfera con un pavimento, saremo in grado di studiare meglio i suoi movimenti continui.

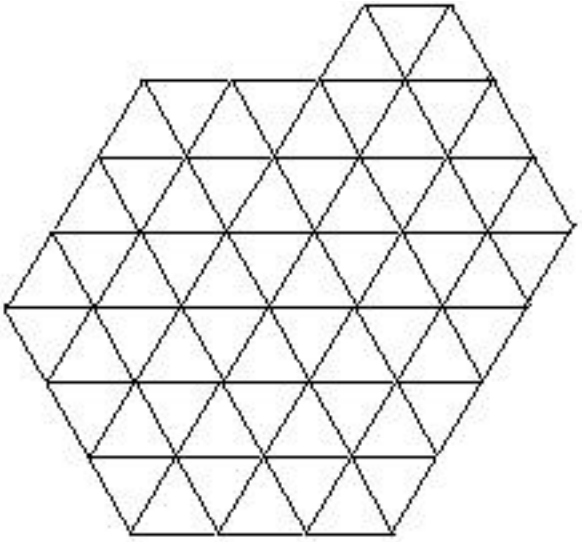
Immaginiamo di lasciar cadere sul piano un certo numero di mattonelle o tasselli triangolari[6], che immagineremo però non di pesante marmo ma sottili e lievi come carte da gioco. Alcune mattonelle cadranno al dritto, altre al rovescio, alcune si sovrapporranno mentre qualche punto del piano rimarrà scoperto. Chiamiamo triangolazione una tale pioggia di tasselli. In ogni punto del piano potremo allora contare gli strati di mattonelle sovrastanti, contando in positivo quelle al dritto ed in negativo quelle al rovescio, in modo che se sopra un punto ci sono 3 mattonelle al dritto e 5 al rovescio conteremo -2.

Ogni mattonella poi disegna il suo bordo sul piano, che immagineremo percorso in senso orario se la mattonella è caduta al dritto ed in senso antiorario se è caduta al rovescio. Il bordo della triangolazione sarà costituito da tutti i bordi delle mattonelle, con un'avvertenza: se due mattonelle hanno un pezzo di bordo in comune, ma percorso in direzioni opposte, tale pezzo si cancella.



Se invece il pezzo in comune è percorso nello stesso senso, conterà doppio nel computo totale. Aumentando il numero delle mattonelle dunque non necessariamente il bordo aumenta, ma è chiaro che se ad esempio cominciamo a coprire il piano con mattonelle tutte al dritto, per ogni pezzo di bordo cancellato ce ne sarà uno nuovo, e non riusciremo mai a cancellarlo tutto.

(http://www.ma.utexas.edu/mp_arc-bin/mpa?yn=98-483) e sul suo "mirror" ginevrino (http://mpej.unige.ch/mp_arc-bin/mpa?yn=98-483).



A meno che ovviamente non mettiamo anche mattonelle al rovescio, ed in questo caso riusciremo a cancellare tutto il bordo solo se pavimenteremo al rovescio esattamente la stessa parte di piano che avevamo pavimentato al dritto. Insomma le triangolazioni senza bordo, cioè quelle in cui tutti i pezzi del bordo si cancellano a vicenda, sono nulle perché hanno zero strati in ogni punto, ovvero in ogni punto il numero di strati al dritto è uguale a quello degli strati al rovescio.

La situazione cambia drasticamente se invece della superficie piana scegliamo una superficie sferica. Anche sulla sfera chiameremo triangolazione la consueta pioggia di triangoli, incuranti del verso, delle lacune e delle sovrapposizioni. In questo caso però è chiaro che esistono triangolazioni senza bordo non nulle, potremo facilmente coprire la sfera con mattonelle tutte al dritto senza lacune né sovrapposizioni, ottenendo una triangolazione senza bordo e ad uno strato.

Il lettore converrà facilmente (pena l'obbligo di seguire un corso di topologia algebrica) che le triangolazioni senza bordo sono essenzialmente di questo tipo: o tutta la sfera è coperta da un certo numero di strati al dritto, o da un certo numero di strati al rovescio, oppure da zero strati, la triangolazione nulla.

Insomma le triangolazioni senza bordo della sfera sono descritte dal numero intero che conta gli strati, positivo, negativo o nullo.

Questo sforzo analitico dunque, che ha appesantito le superfici con queste strane sovrastrutture triangolari, ci permette una interessante osservazione sintetica: sulla sfera non tutte le "pavimentazioni" sono uguali, perché possiamo contare gli strati, mentre le "pavimentazioni" del piano sono tutte nulle.

Gradi e movimenti. Torniamo ora ai movimenti continui (del piano e della sfera). Un movimento continuo muoverà le triangolazioni, ovvero solleverà le mattonelle triangolari che le compongono per farle ricadere, deformandole, altrove, però se una parte del bordo di due triangoli si cancellava, continuerà a cancellarsi anche dopo il movimento. In particolare una triangolazione senza bordo si sposterà in una triangolazione senza bordo.

Quello che potrebbe cambiare (sulla sfera ovviamente) è il numero degli strati, o il fatto che si tratti di strati al dritto o al rovescio. È facile vedere che se un movimento trasforma una triangolazione che ricopre la sfera una volta al dritto in una che la ricopre due volte al dritto, trasformerà una che la ricopre due volte al dritto in una che la ricopre quattro volte al dritto, e una che la ricopre tre volte al rovescio in una che la ricopre sei volte al rovescio, cioè in generale raddoppierà il numero degli strati. Ci saranno poi movimenti che triplicano gli strati, e altri che raddoppiano gli strati rovesciandoli, moltiplicando cioè per -2. Quindi anche i movimenti continui della sfera sono descritti da un fattore intero, che dice per quale numero dobbiamo moltiplicare il numero di strati di una triangolazione senza bordo per ottenere il numero di strati della triangolazione di arrivo.

Questo fattore intero si chiama *grado* del movimento continuo.

Vi stupireste se vi dicessi che il grado di un movimento descritto da una espressione algebrica è uguale al grado dell'espressione stessa? Credo di no, anche se su questo punto dovrete credermi sulla parola. Piuttosto voglio farvi osservare una interessante conseguenza: in generale il grado di un movimento continuo può essere positivo, negativo o nullo. Invece il grado di una espressione algebrica è sempre positivo. E quindi, il grado di un movimento descritto da una espressione algebrica non può essere né negativo né zero.

Arriviamo dunque all'ultima formulazione della congettura iniziale: *ogni movimento continuo di grado positivo è suriettivo.*

Se quest'ultima congettura è vera infatti, poiché i movimenti continui provenienti da espressioni algebriche hanno grado positivo essi sono suriettivi, cioè ogni punto della sfera è punto di

arrivo. Ma allora anche zero è un punto di arrivo, ovvero esiste un numero complesso che va a finire in zero, ovvero risolve l'equazione algebrica corrispondente. Ciò vuol dire insomma che ogni equazione algebrica ha almeno una soluzione, e questo, come ricordate, implica che ne ha tante quante il grado dell'equazione.

Sherlock Holmes e la battaglia finale. Le analogie tra la soluzione di un giallo e la dimostrazione matematica sono state tante volte messe in luce, dando vita ad un vero e proprio genere letterario, i cui capostipiti sono Sherlock Holmes di Arthur Conan Doyle e Dupin di Edgar Allan Poe. In particolare Doyle ha preso a prestito uno degli strumenti chiave della dimostrazione matematica, la *reductio ad absurdum*, facendone una delle massime più celebri del suo personaggio: quando tutte le altre ipotesi si rivelano impossibili, quella che resta, sebbene improbabile, è quella vera[7].

Riguardo all'ultima forma della congettura, ci sono solo due possibilità per un movimento continuo di grado positivo: o è suriettivo o non lo è. Se mostriamo che la seconda è impossibile, avremo dimostrato il teorema.

Ma cosa vuol dire che un movimento non è suriettivo? Che qualche punto non è punto di arrivo, che almeno un punto rimane scoperto. Dunque il nostro movimento ha come partenza l'intera sfera, e come arrivo (al più) la sfera meno un punto. Ma ricorderete che la sfera è solo un piano coronato, ovvero una sfera senza questo coronamento è un piano. Dunque un movimento non suriettivo è un movimento dalla sfera al piano. Ma un tale movimento continuo trasforma triangolazioni senza bordo in triangolazioni senza bordo, e ricordiamoci che le triangolazioni senza bordo del piano sono solo quelle nulle, a zero strati. Dunque questo movimento trasforma triangolazioni con numero di strati arbitrario in triangolazioni nulle, dunque ha grado zero. E quindi la seconda possibilità, quella di un movimento continuo di grado positivo non suriettivo, è assurda.

Scacco matto.

---

6 Chiamiamo qui triangolo una parte di piano delimitata da tre punti e tre linee che li congiungono a due a due, anche se queste linee sono curve.

7 Arthur Conan Doyle, The complete Sherlock Holmes, Doubleday, New York.

aut aut **285-286** maggio-agosto 1998

PENSARE LA FOLLIA

ROVATTI, A cavallo di un muretto. Note su follia e filosofia; SCIACCHITANO, Essere giusti con la follia; COLUCCI, ROTELLI, Dialogo sulla legge 180; COLUCCI, Il vetro dell'acquario. M. Foucault e le istituzioni della psichiatria; DI VITTORIO, La balbuzioe di Basaglia; RECALCATI, Follia e struttura in J. Lacan; ALCANDRE, BROCHARD, L'ultima filosofia di Althusser; BLANCHOT, La follia per eccellenza; ARTAUD, Dossier su Artaud le môm o; CHIESA, La lucida sragione. Artaud e Freud; CALLIGARIS, Hölderlin: "vita" e follia; MERINI, Queste panche erano alberi.

Invarianti n° 31 Agosto 1998

Il "progetto storico" di M. Tafuri **3 • Il disegno. Codice condiviso da arte e scienza** di P. Roccasecca **15 • Il museo come laboratorio della produzione *formativa*** di P. Ferraris **24 • Le sottigliezze metafisiche della merce** di A. Jappe **32 • Nel segno dell'informazione. Per una ripresa critica dell'analisi del capitalismo contemporaneo** di L. Cillario **35 • Lavoro immateriale, lavoro intellettuale, azione** di G. Patrizi **43 • Femminilizzazione del lavoro e riproduzione sociale** di C. Filosa **46 • L'organizzazione dei capitali uniti. Note generali sparse sulle istituzioni dell'imperialismo transnazionale** di G. Pala **51 • Il concetto dell'"altro". Note per una filosofia dell'uguaglianza** di C. Mutini **60**