



Violazione geometrica di una legge algebrica

Daniele Guido*

Tutto cominciò con Heisenberg, ed il suo celebre principio di indeterminazione, che sancisce, in qualche misura, la miopia intrinseca della fisica microscopica.

Nel senso che, nel tentativo di mettere a fuoco una delle particelle elementari per stabilirne l'esatta posizione, se ne altera irrimediabilmente la velocità, e viceversa, misurandone esattamente la velocità, la nostra visione ne viene irrimediabilmente sfocata.

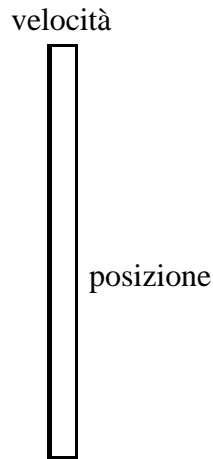
Due nuovi concetti irrompono per la prima volta nella fisica, concetti che si ritenevano fino allora confinati alle scienze umane, propri appunto della imprevedibilità e della sensibilità umane.

Incertezza in primo luogo, non più dipendente dalla limitatezza dell'osservatore (umano!), ma intrinseca ed inesorabile. Un piccolo rettangolo di incertezza non può essere eliminato, si può solo decidere come suddividerla: piccolissima incertezza nella posizione, e grandissima incertezza nella misura della velocità,



o viceversa:

* Ordinario di Analisi matematica, Università di Roma 2.



ma l'area del rettangolo, cioè l'incertezza complessiva, non cambia.

E sensibilità anche: lo sguardo dell'osservatore, il fuoco di quello sguardo, è in grado di turbare il comportamento del microscopico oggetto osservato.

Ma il matematico presente nell'uomo di scienza non si lascia sviare: siede e va in cerca di un metaforico ago nel pagliaio. Di alcuni mattoni nella costruzione della teoria (il meno possibile!) che vanno rimossi, e magari rimontati in un altro ordine, per dare all'insieme un aspetto sorprendentemente diverso, ed in grado di accogliere la nuova realtà.

La regola che dovremo rivedere è una regola ben nota: cambiando l'ordine dei fattori il prodotto non cambia, la proprietà commutativa.

Che succede infatti se i fattori in questione sono proprio le misure della posizione e della velocità della nostra particella microscopica? Se misuriamo la posizione, avremo irrimediabilmente disturbato la particella, rendendo assolutamente aleatoria la sua velocità (quell'ineliminabile rettangolino di incertezza!). Potremo ovviamente misurarne la velocità, ma solo a patto di scaricare tutta l'incertezza sulla posizione, tanto che una nuova

misura della posizione potrà dare un risultato niente affatto correlato al precedente, insomma la posizione misurata prima della velocità è diversa da quella misurata dopo, l'ordine conta eccome!

Bisogna qui precisare che l'esistenza di strutture ove la proprietà commutativa è violata era ben nota ai matematici, si tratterà perciò di cercare la struttura giusta tra quelle note, o magari di crearne una nuova, che permetta di descrivere i fatti precedentemente delineati.

Nasce così la meccanica quantistica, un modo profondamente nuovo di concepire la realtà fisica, che ingloba in un sistema coerente sia l'incertezza che la sensibilità delle particelle elementari, fornendo uno strumento per fare previsioni accurate e quindi per lavorare con l'infinitamente piccolo¹.

~0~ - ~0~

Eppure finora l'universo platonico non è stato turbato. Tutto si è svolto sul piano della meccanica, un piano per così dire terrestre ed inferiore, lasciando inalterate le categorie di spazio e di tempo, ed il mondo superno delle idee e della geometria.

Ma da dove nascono le nostre idee geometriche? Se usiamo l'etimologia per far della sociologia del pensiero scopriamo che il "punto" è ciò che si può pungere, cioè marcare con uno strumento acuminato. E se andiamo più indietro, alle radici euclidee della geometria, scopriamo che la parola greca usata è σημα, segno. La geometria cioè è ciò che può essere disegnato, o meglio è la forma astratta di un'antica scienza sperimentale, fatta di disegni e di punti sul terreno.

Alla radice dell'idea di punto c'è insomma la sensibilità del nostro polpastrello e l'acutezza del nostro sguardo.

Questa idea sperimentale della geometria è in grado di resistere alla moderna concezione del processo di misura, una concezione all'interno della quale il fuoco dello sguardo è in grado di turbare il moto di una particella microscopica?

¹ La struttura matematica giusta per descrivere gli aspetti non commutativi della meccanica quantistica è quella degli operatori lineari su uno spazio di Hilbert, si veda ad esempio il fondamentale libro di John von Neumann, *Fondamenti matematici della meccanica quantistica*, a cura di Giovanni Boniolo, Il Poligrafo, Padova, 1998 (tradotto dall'originale tedesco del 1932).

La metafora del fuoco, che ho usato fin dall'inizio, non è casuale; gli esperimenti sui limiti dell'osservazione che sono alla base della meccanica quantistica svelano che lo sguardo non è neutrale, nemmeno in meccanica. Ogni osservazione comporta una interazione, ed in particolare un impiego di energia.

Più è acuto il nostro sguardo, più è caldo il suo fuoco, maggiore cioè è l'energia di cui abbisogna.

Ma qui entrano in gioco altre grandi rivoluzioni della fisica moderna. L'equivalenza tra massa ed energia in primo luogo, $E=mc^2$. Grande energia significa quindi creazione di materia. Poi la relatività generale, secondo la quale la materia deforma la struttura dello spazio, la sua geometria. Dunque uno sguardo troppo acuto può creare materia che deforma l'universo. Ma nella fisica stellare, se c'è troppa materia concentrata in pochissimo spazio, come nel caso di una stella implosa dopo una supernova, la deformazione spaziale può giungere all'estremo, fino a bucare l'universo stesso, creando ciò che si chiama un buco nero.

Insomma, se cerchiamo di portare alle estreme conseguenze l'idea di punto alla luce della fisica moderna scopriamo una vera puntura nella struttura dell'universo. Il fuoco dello sguardo ha incenerito ciò verso cui era diretto. Dovremo dunque rassegnarci alla distruzione del concetto di spazio?

Di nuovo, il matematico si siede e cerca di spostare qualche mattone chiave. Questa volta però con un'ansia ed una passione nuove, perché il problema riguarda il cuore di una delle sue discipline fondatrici, la geometria.

Ma, proprio per questo, con una libertà nuova. Infatti qui non ci sono in senso stretto risultati sperimentali contraddittori. La matematica non è una scienza sperimentale, o, se lo è, la sua arena è la mente umana, governata dalla logica e dal rigore. Si tratta quindi di un'arena molteplice, in cui convivono senza confliggere teorie basate su assunti diversi.

L'esigenza di spostare qualche mattone non è quindi impellente, è, in un certo senso, una questione di sensibilità. Sensibilità ad idee esterne, il punto come puntura dell'universo, che suggerisce l'esigenza di una nuova geometria, nonché sensibilità a tanti indizi interni, diversi aspetti di teorie matematiche che sembrano suggerire la possibilità di una nuova lettura geometrica unificante.

In un certo senso il precedente storico è la vicenda del quinto postulato di Euclide.

Per fondare la geometria, il sommo aveva avuto bisogno di cinque postulati (ben cinque? solo cinque?). Il quinto apparve subito un po' farraginoso, poco fondamentale in un certo senso, e però Euclide non era riuscito a farne a meno.

Ci si provarono, per molti secoli, matematici di ogni levatura². Convinti, tutti o quasi, che quel postulato fosse inutile, fosse cioè conseguenza dei precedenti quattro. Finché, e siamo ormai all'800, la questione fu risolta in modo affascinante e non previsto. Quel postulato non era affatto irrilevante: farne a meno significa ampliare enormemente i confini della geometria, in una direzione che (tutto si tiene!) permetterà di comprendere la geometria della relatività generale.

Tornando al problema precedente, qual è l'assunto cui dovremo rinunciare per ampliare la geometria tanto da risolvere la crisi del concetto di punto? E se, come ci suggerisce la discussione iniziale, si trattasse proprio della proprietà commutativa? Il fatto è che la proprietà commutativa è propria dell'algebra, non della geometria. Cosa sarà questa geometria che rinuncia ad una proprietà che non sapeva di avere?³

Provocazione od aporia fondatrice, il termine geometria non commutativa ha troppi echi e significati perché si possa anche solo accennarli in questo luogo. Mi limiterò ad una proposta di spiegazione che traggio da un recente lavoro di ricerca⁴, nel quale si formula una teoria che si rifà alle radici quantistiche del problema.

Cos'è un'osservazione geometrica? La più semplice è quella che risponde alla domanda dove. Come per una nave nell'occe-

² Si legga in proposito il racconto che ne fa, con la consueta abilità di divulgatore, Isaac Asimov in "Euclid's Fifth", in *The Magazine of Fantasy and Science Fiction*, 1971.

³ Geometria non commutativa è il nome dato ad un nuovo sistema matematico proposto in anni recenti da Alain Connes, campo di ricerca in crescita vertiginosa negli ultimi anni, si veda Alain Connes, *Noncommutative Geometry*, *Academic Press*, 1994.

⁴ Sergio Doplicher, Klaus Fredenhagen, John E. Roberts, *The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields*. *Communications in Mathematical Physics* vol. 172, 1995.

no, la posizione sarà descritta da coordinate, latitudine e longitudine. L'imprecisione dello sguardo comporterà il descrivere, invece di coordinate precise, coordinate con un margine di errore, invece di un punto un rettangolo. Sappiamo già che una troppo precisa messa a fuoco rischia di bruciare il tessuto dell'universo. Ma una più attenta analisi ci dice che, di nuovo - meravigliosa coincidenza! - l'ineliminabile imprecisione è l'area del rettangolo: l'universo non si buca a patto di mantenere il rettangolo al di sopra di un'area minima. Potremo cioè avere informazioni molto precise sul valore di una coordinata, a patto di una grande imprecisione dell'altra. E viceversa.

Sono le coordinate le osservazioni che non commutano.

Cosa resta dunque della geometria dello spazio? In primo luogo siamo passati dalla descrizione dello spazio come insieme di punti a quella basata su un sistema di coordinate. È chiaro che se queste coordinate possono essere misurate indipendentemente, potremo assegnare tutte le coordinate di un punto e quindi tornare alla descrizione precedente. I due punti di vista sono, in questo caso, equivalenti. Ma se rispettiamo le regole della fisica moderna, accettiamo cioè che due diverse coordinate non commutano, ovvero non possono essere misurate indipendentemente, non possiamo più tornare indietro. La nuova descrizione, basata su quantità geometriche osservabili che violano la proprietà commutativa, è perfettamente coerente. È ancora, profondamente, una geometria. Ma il concetto di punto è perduto per sempre.