Limiti, limiti generalizzati e ultrafiltri.

Daniele Guido

Una delle principali contraddizioni racchiuse dalla parola limite può essere esemplificata dalla locuzione “al limite”, come ad esempio nella frase “No, non posso andarci, certo non questa settimana, al limite lunedì,...”

Dal punto di vista letterale quel limite parrebbe proprio irraggiungibile, una possibilità teorica espressa solo per mostrare l’immensità della distanza che ci separa da essa. Eppure per il solo fatto di essere nominata, questa possibilità diventa un luogo (o in questo caso un tempo, lunedì), e come tale dotato di una sua indubitabile concretezza. Il significato della frase è quindi completamente opposto, e l’interlocutore potrà tranquillamente rispondere “Va bene, posso aspettare fino a lunedì, allora siamo d’accordo”.

Questa stessa contraddizione si trova anche nel concetto di limite in matematica, ed anzi vi svolge il ruolo di una aporia creatrice.

Partiamo da un caso semplice, in cui il luogo dell’evento limite è già nelle premesse. Supponiamo di voler conoscere il tasso di inflazione di quest’anno. Diciamo che nel ‘95 sia stato del 5%, nel ‘96 del 4% e, non prevedendo eventi che turbino significativamente l’andamento dell’economia, possiamo aspettarci che nel ‘97 sia del 3%. Gli economisti non me ne vorranno se ho banalizzato un po’ l’esempio, ma la previsione, mese per mese, di quello che sarà il tasso di inflazione annuo si fa abitualmente, ed è quello che si chiama il tasso tendenziale di inflazione. In questo caso il luogo limite è estremamente concreto, il dicembre '97, ed è anche chiaro che in quel momento l'inflazione avrà un suo preciso valore, dunque è lecito chiedersi se i due valori, quello previsto e quello attuale, coincidano. Questo succederà purché non si sia verificato nel frattempo un evento catastrofico, un qualche sbalzo improvviso, che alteri in modo significativo il fattore che stiamo studiando. Ovviamente se questo avviene poniamo nell'ottobre del '97 le nostre previsioni potranno essere aggiustate dopo quel momento, portando ad un nuovo valore previsto. Nel concetto di limite in matematica c'è l'idea che si possa controllare il fenomeno "fino ad un istante prima" del momento al quale la nostra previsione si riferisce, dunque se un salto deve esserci, provocando una discrepanza tra il valore previsto e quello effettivo, deve avvenire "all'ultimo istante", diciamo nella notte di capodanno.

In matematica le grandezze che variano col tempo (o più in generale al variare di un qualche parametro) prendono il nome di funzioni; le funzioni senza salti dell'ultimo istante, cioè per le quali il valore previsto coincida con quello effettivo, si chiamano funzioni continue (qualche pedante dirà che sono solo continue da sinistra!).

In questo caso la irraggiungibilità del limite non sta nell'assoluta lontananza della fine dell'anno, quanto nel fatto che una previsione, per essere tale, deve essere fatta a priori, dunque in anticipo su quella data.

Vediamo ora un altro esempio, preso dalla fisica, riguardante la radioattività di certi elementi. L'uranio 234 ad esempio, è un metallo radioattivo, cioè emette particelle alfa nel tempo. Ad ogni quantitativo di uranio corrisponde un numero preciso di nuclei instabili di uranio 234 (potremmo chiamarlo la sua "vita radioattiva"). Se emettesse in modo uniforme, diciamo un centesimo del potenziale iniziale ogni anno, sarebbe inattivo esattamente dopo cento anni. L'emissione radioattiva però non funziona in questo modo. Per ogni isotopo radioattivo c'è un tempo ben preciso, che viene chiamato "mezza vita", durante il quale la metà dei nuclei radioattivi "decade" emettendo una particella alfa. Ad esempio per l'uranio 234 la mezzavita è di 248.000 anni. Ma attenzione! Se in 248.000 anni si consuma metà del potenziale radioattivo, questo non vuol dire che in altri 248.000 anni la radioattività si sarà esaurita! Infatti dovremo concludere che se in 248.000 anni la radioattività si è ridotta della metà, in 596.000 anni si sarà ridotta alla metà della metà, cioè ad un quarto, e dopo altri 596.000 anni si sarà ridotta ad un ottavo, e così via. È chiaro cioè che benché la radioattività diminuisca costantemente, un tale procedimento di dimezzamento non la cancellerà mai del tutto. Sebbene la sua mezza vita sia di "soli" 248.000 anni, l'uranio impiega dunque un tempo infinito a spendere la sua vita intera (scongiuriamo letture catastrofiste di questo fatto: l'eternità della radioattività dell'uranio è solo teorica, in primo luogo perché l'emissione è un fatto discreto, si emette una particella per volta ed arrivati all'ultima la radioattività è davvero assente, ed in secondo luogo perché sotto una certa soglia la radioattività non è comunque discernibile dalla radioattività di fondo).

Potremmo paragonare la vita radioattiva dell'uranio alla vita degli esseri autofagi. Sull'esistenza di tali esseri siamo confortati dal parere della mitica aquila Garuda, la quale descrive il Brahmino come un essere che "nutre se stesso di se stesso"[1].

Un altro esempio ci viene fornito da un racconto di Robert Sheckley[2]. Qui Mr. Carmody riceve in premio per una lotteria intergalattica alla quale non ha nemmeno partecipato per l'appunto un essere autofago. Al raccapriccio del signor Carmody nell'assistere al pasto del premio, subentra una domanda pratica: "Ma nel mangiare te stesso, non finirai con l'esaurirti?" "Tutti dobbiamo morire", risponde il premio con filosofia. Però, aggiungo io, anche se il premio per nutrirsi ogni giorno consumasse metà del proprio peso, avesse cioè una mezza vita di un giorno, sarebbe un essere pressappoco immortale, un po' come l'uranio 234.

Ma torniamo al concetto di limite. Nel caso dell'uranio è chiara la tendenza ad annullarsi del suo potenziale radioattivo, ma tale tendenza, nonostante la sua realtà incontrovertibile, non raggiunge mai il suo fine. Non esiste insomma un luogo ("la fine dell'eternità", "l'ultimo istante del tempo") in cui la radioattività dell'uranio 234 sia effettivamente zero. E quindi non ha nemmeno senso parlare della discontinuità "di salto" dell'esempio precedente, poiché non esiste un "ultimo istante del tempo" dove misurare la radioattività dell'uranio e controllare se sia zero come previsto oppure no.

Il matematico a questo punto fa un po' come il personaggio del primo dialogo. Dice: "al limite, quando il tempo diventa (tende

[1] Roberto Calasso (1996).
[2] Robert Sheckley (1990).

all') infinito, la radioattività dell'uranio sarà nulla". E nel dirlo inventa un luogo, l'infinito, dove la radioattività è nulla.

All'inizio in realtà darà una spiegazione più realistica (ma più complicata) della sua affermazione. Dirà: "Per quanto poca radioattività io possa concepire, esisterà un istante futuro dopo il quale la radioattività dell'uranio sarà ancora più piccola".

Ma poi, a furia di parlarne, comincerà a pensare che l'infinito sia un punto per davvero, e che a quel punto l'uranio non sarà più radioattivo. E ovviamente renderà rigorosa questa idea, a dire il vero un po' fantasiosa. Considererà la sequela infinita di tutti gli istanti del tempo, e aggiungerà un punto dopo tutti gli altri, che chiamerà l'ultimo istante del tempo. Questo ultimo istante potrà essere caratterizzato in modo funzionale: prendiamo una grandezza che vari nel tempo (una funzione), e che tenda, al passare del tempo, ad avvicinarsi sempre più ad un certo valore limite. Per definizione la grandezza assumerà esattamente questo valore nel punto all'infinito. Ma c'è di più: la funzione, così definita, sarà una funzione continua nel punto all'infinito. Facendo ciò non si è solamente aggiunto un istante agli infiniti altri, ma lo si è anche caratterizzato rispetto alla sua relazione con gli altri. Deve essere posteriore a tutti gli altri, ma "immediatamente posteriore" ai precedenti, per evitare che esistano interregni tra la serie degli istanti veri e propri e quest'ultimo, interregni nei quali la grandezza in questione potrebbe avere dei salti improvvisi che ne pregiudicherebbero la continuità, è il caso di dirlo, all'ultimo istante.

Più di un lettore avrà seguito con un certo scetticismo la chiacchierata sul punto all'infinito, non tanto perché vi abbia trovato difficoltà logiche insormontabili, quanto piuttosto perché immediatamente incredulo rispetto ad una premessa. Infatti ci si domanderà legittimamente se valga la pena di fare una teoria, quella del punto all'infinito, basata sull'esistenza di tante grandezze che, col passare del tempo, tendano inevitabilmente ad un valore fissato. Avranno forse senso nella fisica teorica, si dirà l'avveduto lettore, e magari nella fantascienza sfrenata di Robert Sheckley, ma non certo nella realtà! Nella realtà le grandezze che ci interessano variano in modo capriccioso ed imprevedibile, inutile ogni tentativo di previsione, meglio agire a posteriori, cogliere l'attimo...

Il matematico, con lo snobismo che gli è caratteristico, non cadrà nella trappola, e si guarderà bene dallo scivolare dal piano logico-formale che gli è congeniale alla questione esistenziale che gli viene contrapposta. Ma naturalmente, sulla natura dei fenomeni imprevedibili, ha già costruito un'infinità di teorie perfettamente rigorose. Proverò a raccontare come si generalizza il concetto di limite, e la corrispondente creazione del luogo limite, nel caso di fenomeni di questo tipo.

Visto che Roma è la città eterna, potremmo domandarci quale sarà la sua temperatura all'ultimo istante del tempo. Purtroppo però questa domanda è assurda perché (in una ipotesi di universo stabile, in cui Roma esista indefinitamente) la temperatura è un fenomeno eminentemente stagionale, e quindi oscilla ciclicamente, senza mai stabilizzarsi. In questo caso insomma il valore limite è in realtà una intera fascia di valori possibili, diciamo, a meno di catastrofi, tra i -5° e i 45°. E allora conseguentemente il luogo dei valori limite, da un solo punto, l'ultimo istante del tempo, diventa un insieme, probabilmente molto grande, di punti.

Quello che si può fare allora è seguire la temperatura anziché per tutti gli istanti solo in una sottoclasse, ad esempio tutti i 31 di luglio a mezzogiorno. È chiaro che in questo modo l'oscillazione stagionale sparisce dal nostro punto di vista, ed abbiamo speranza di trovare un valore limite. Tutti i punti all'infinito che corrispondono a questa scelta avrebbero l'etichetta "trentuno di luglio a mezzogiorno". Ovviamente una procedura di limite generalizzato è molto più di questo, significa scegliere un percorso nel quale ogni grandezza variabile raggiunga senza sbalzi un suo preciso valore limite. Ciò dovrebbe avvenire ad esempio anche per la distanza tra il Sole e Marte. Siccome l'orbita è ellittica, questa distanza dipende dal giorno dell'anno marziano (e non da quello terrestre!). perciò se vogliamo controllare entrambi i fenomeni dovremmo scegliere un percorso più selettivo, ad esempio uno che contenga solo i 31 di luglio a mezzogiorno in cui la distanza Sole-Marte è massima.

Certo ci si può domandare come si fa ed a che serve calcolare un limite generalizzato. Come scegliere un percorso tra gli infiniti arbitrari, e che valore attribuire al limite trovato? Bisogna dire che, principalmente, i limiti generalizzati hanno un valore teorico, fa comodo poter pensare che esista un percorso (od un luogo) ove tutte le grandezze, per quanto incontrollabilmente variabili, raggiungano un preciso valore. E poi, le grandezze che variano in modo regolare e prevedibile come la radioattività dell'uranio, raggiungono, qualunque percorso scegliamo, sempre lo stesso valore previsto.

Voglio concludere cercando di dare un'idea di come è fatto uno di questi percorsi che portano ad un limite generalizzato nel caso più semplice possibile, quello in cui il parametro variabile si muove in modo discreto, ad esempio anziché considerare il tempo nel suo fluire continuo, possiamo vederlo scandito dai giorni, che numereremo consecutivamente, ad esempio a partire dal primo gennaio dell'anno 2000.

Seguiremo i fenomeni, imprevedibili o no, lungo la sequela dei giorni fino al termine, ma questo termine non sarà più un punto, l'ultimo giorno del tempo, ma un'infinità di punti, a seconda del percorso scelto. L'insieme degli ultimi giorni sarà un insieme di percorsi accettabili.

Certo che se il mondo, come dice T.S.Eliot, finisce "not with a bang, but a whimper"[3], cioè ci aspetta una morte per assoluta uniformità, una morte per entropia, tutte le grandezze tenderanno ad un limite, e tutti i percorsi ci porteranno allo stesso punto. Ma se ci aspettiamo invece una eternità imprevedibile come la realtà cui siamo abituati, i percorsi accettabili vanno scelti con cautela.

Come dicevamo potremmo scegliere un percorso che prediliga il mese di luglio, il che renderebbe più facile la previsione della temperatura di Roma, ma questo non gioverebbe alla previsione della distanza Sole - Marte. Sceglieremo allora dei percorsi estremisti (stati estremali, vengono chiamati) che, ad ogni domanda come "percorrerai il mese di luglio?" risponderanno sempre o "prediligerò solo il mese di luglio" oppure "prediligerò solo gli altri mesi". Ovviamente nel primo caso sarà ancora legittimo chiedere "e i mesi di luglio degli anni bisestili?" e l'estremista risponderà, secondo la prescrizione cristiana, "sì sì" (prediligerò solo i bisestili) oppure "no no" (solo i non bisestili). Un percorso di questo genere si chiama un *ultrafiltro* ed in effetti più che un percorso sembra un filtrare, o scremare, tutti i giorni che "non contano" ai fini della previsione.

Ci sono degli ultrafiltri semplici, che possono essere risolti, capiti, con un numero finito di domande. Pensate un numero qualunque, ad esempio 4362, e ad ogni domanda su un qualche insieme di giorni rispondete "si" se 4362 fa parte dell'insieme e "no" altrimenti. Vi sarete senz'altro comportati da ultrafiltro.

Però questi percorsi non ci portano lontano. Il percorso di prima ci porta né più e né meno al 9 dicembre dell'anno 2012 (4362° giorno dal primo gennaio del 2000, contando i bisestili),

---

[3] T. S. Eliot, "The Hollow Men", (1988).

certo non all'ultimo giorno del tempo!

Tutti gli ultrafiltri che non sono di questo tipo, non sono cioè legati ad un giorno stabilito, si chiamano ultrafiltri *liberi* e ci conducono invariabilmente (anche se ognuno seguendo un percorso diverso) all'ultimo giorno del tempo.

Questa affermazione è ciò che viene chiamato un teorema.

La dimostrazione di questo teorema si può fare con quello che i fisici chiamano un *gedanken experiment*, cioè un esperimento teorico. Supponete di rivolgere all'ultrafiltro la domanda "prediligerai il primo giorno?" Se la risposta è sì è ovviamente legato al primo giorno, se è no, chiedetegli se prediligerà il secondo, e così via. Se risponde "sì" ad un certo punto è certo un ultrafiltro legato, ma se non risponde mai di sì, è insomma un ultrafiltro libero, vuol dire che il suo percorso gravita decisamente intorno all'infinito.

Purtroppo, tra le infinite qualità di un ultrafiltro libero, non è chiaro se ci sia l'esistenza: l'argomento ontologico di San Tommaso d'Aquino non è una dimostrazione matematica.

Dopo la "disfatta"[4] provocata dal teorema di Gödel, i matematici sono diventati più cauti nel considerare esistente qualunque cosa possa essere rigorosamente concepita. Lo stesso Alain Connes, uno dei più brillanti matematici viventi, è poco propenso ad affidarsi ad "...une existence aussi précaire que celle d'un ultrafiltre, c'est -à-dire d'un caractère *non measurable* du groupe $(\mathbf{Z}_2)^{\mathbf{N}}$."[5] Infatti, sebbene non si possa dimostrare che tali ultrafiltri non esistano, è anche impossibile costruire un ultrafiltro libero.

È come se, colpevoli in primo grado e prosciolti in appello, gli ultrafiltri attendessero all'infinito il giudizio della Cassazione.

Nelle more di questo processo infinito, molti matematici, senza grossi scrupoli, se ne servono alla bisogna.

Bibliografia

R. Calasso, *KA*, Adelphi, Milano, 1996.

A. Connes, *Géométrie non commutative*, InterEditions, Paris, 1990.

T. S. Eliot, *Collected Poems 1909-1962*, Harctcourt Brace Jovanovich, San Diego New York London, 1988.

L. Gilman, M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Springer-Verlag,

[4] Così almeno la sentiva John von Neumann, secondo la biografia di Israel e Millán (1995).

[5] Alain Connes (1990).

New York Heidelberg Berlin 1976.
A.E Hurd, P.A Loeb, *An introduction to nonstandard real analysis*, Academic Press, Orlando, 1985.
G. Israel, A. Millán Gasca, *Il mondo come gioco matematico*, La Nuova Italia Scientifica, Roma, 1995.
R. Sheckley, *Il difficile ritorno del signor Carmody*, Urania 530, Mondadori, Milano, 1990.